

基于二次最优阈值近似消息传递法的蒸发波导去噪重构

芮国胜¹, 刘歌¹, 田文彪¹, 董道广¹, 张雅楠²

(1. 海军航空大学信号与信息处理山东省重点实验室, 山东 烟台 264501;

2. 93716 部队, 天津 301716)

摘要: 针对蒸发波导时空态势感知过程中, 压缩感知观测阶段混入噪声对高精度重构产生不利影响的问题, 提出了基于二次最优阈值的近似消息传递法。所提方法综合了软、硬阈值函数的优势, 设计了一种二次稳固阈值函数, 改善 AMP 算法的重构性能, 并在近似消息传递法的迭代过程中加入了基于共轭梯度法的最优阈值设置策略, 加快收敛速度。理论分析和实验表明, 所提算法比现有的几种主流重构算法的收敛速度更快, 去噪重建误差更小。

关键词: 压缩感知; 蒸发波导; 去噪重构; 近似消息传递法; 阈值函数

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2019200

Denoising and reconstruction of evaporation duct based on quadratic optimal threshold approximation message passing method

RUI Guosheng¹, LIU Ge¹, TIAN Wenbiao¹, DONG Daoguang¹, ZHANG Yanan²

1. Signal and Information Processing Key Laboratory in Shandong, Naval Aviation University, Yantai 264501, China

2. Unit 93716 of PLA, Tianjin 301716, China

Abstract: To solve the problem that the mixed noise of compressed sensing observation stage had adverse effects on the high-precision reconstruction in the time-space situation awareness process of evaporative duct, an approximate message passing method based on quadratic optimal threshold was proposed. A quadratic stabilization threshold function which integrated advantages of soft and hard threshold functions was designed, and the optimal threshold setting policy was added to the iterative process based on conjugate gradient method to speed up convergence. Theoretical analysis and experiments show that, compared with several mainstream algorithms, the proposed algorithm has the faster convergence rate and lower denoising reconstruction error.

Key words: compressed sensing, evaporation duct, denoising and reconstruction, approximate message passing, threshold function

1 引言

海面水蒸气蒸发会引起大气湿度随着高度的增加而急剧减小, 从而导致大气折射指数随高度逐渐降低, 形成近海面的大气异常结构, 即蒸发波导。蒸发波导能陷获无线电波, 有助于实现超视距传播, 但可能造成频谱泄露, 导致己方目标过早暴露^[1]。因此, 蒸发波导的态势获取对海上舰船通信及岸舰

通信都具有极其重要的作用。在电磁空间被各方激烈争夺的今天, 获取各海域的蒸发波导态势迫在眉睫。到目前为止, 蒸发波导态势通常由诸如蒸发波导的高度、强度和陷获频率范围等参数来描述, 这些参数是对传感器采集到的海面温度、压强、湿度、风速等气象参数随时间的变化数据进行解算获得的^[2], 现有的传感器包括海上气象浮标、水文/气象观测站^[3]、卫星平台^[4-5]等。文献[1]中详细分析了不

收稿日期: 2019-05-14; 修回日期: 2019-08-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.41606117, No.41476089, No.61671016)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.41606117, No.41476089, No.61671016)

同海域蒸发波导高度的分布特征及相关气象因子，还分析了不同海域的全球蒸发波导高度特征形成的原因。但实际上要获知蒸发波导的态势，仍然存在很多问题。首先，要获取较高分辨率的蒸发波导态势，需增大传感器密度，不仅浪费资源，且实现十分困难。其次，现有的压缩体制需要采集全部信息再进行计算，舍弃大系数保留小系数，这不仅会造成资源浪费，还会增大编码端计算压力。压缩感知为上述问题提供了有力的解决方案，田文飏等^[6]充分利用蒸发波导的时空稀疏性，提出利用压缩感知对采集到的有限资源进行处理实现整体蒸发波导态势感知，但是利用压缩感知实现蒸发波导态势感知仍然存在着受噪声影响严重、重构精度不高的问题。

近年来，一种新型迭代阈值算法——近似消息传递（AMP, approximate message passing）^[7]算法受到越来越多的关注。它是 Donoho 受置信传播理论的启发于 2009 年提出的，该算法能够在观测值数量不多的情况下实现信号的高速重构，同时拥有线性规划法的高相变性能和迭代阈值法的高速重构性能。AMP 算法在其迭代的过程中并没有利用信号自身的结构特征，而主要利用信号的稀疏分布作为先验知识^[8-9]。文献[10]中提出了一种去噪 AMP（D-AMP, denoising-based AMP）方法，可以看作在 AMP 算法框架下的去噪延伸，并通过理论特性分析和仿真实验证明，具有高性能去噪功能的 AMP 算法的性能优于其他压缩感知重建方法。但是上述 D-AMP 去噪函数都有相应的应用场景限制，对蒸发波导参数重构的去噪效果和收敛速度都不尽如人意。文献[11]提出了一种基于高斯混合学习和去噪的 AMP 算法，研究了加性高斯白噪声下的信号压缩感知去噪重构问题，但是文中的去噪重构方法限于输入统计量未知的平稳遍历信号，难以适用于属于非平稳信号的蒸发波导数据。

本文针对蒸发波导参数的去噪重构问题，提出了一种基于二次最优阈值函数的 AMP（QOT-AMP, quadratic optimal threshold AMP）算法，改善了原有 AMP 算法的重构性能，并设计了一种基于共轭梯度法的最优阈值设置策略，使其更快地收敛并以更高精度重构，理论上证明了 QOT-AMP 算法的收敛性，并通过实测数据进行实验，验证了本文算法的有效性。

2 研究背景

2.1 压缩感知重构问题描述

压缩感知重构技术可以从已知的少量蒸发波导参数观测值 \mathbf{y} 中估计原蒸发波导数据 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ，具体表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M \quad (1)$$

其中， $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 表示观测矩阵， \mathbf{v} 表示观测噪声。由于 $M < N$ ，因此上述重构问题成为病态问题。 ℓ_1 范数最小化问题的目标函数可以表示为

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \zeta \|\mathbf{x}\|_1 \quad (2)$$

其中， $\|\mathbf{x}\|_1$ 表示信号 \mathbf{x} 的 ℓ_1 范数， ζ 表示正则化参数。已有一系列优化算法用来解决 ℓ_1 范数最小化问题，如梯度投影法^[12]、基追踪法^[13]、迭代阈值法^[14]等。其中，凸优化算法中的梯度投影法、基追踪法具有较高的重构精度，但是计算时间复杂度较大，实用性差；而迭代阈值算法更容易实现，计算量适中且应用广泛。

2.2 近似消息传递法

作为一种新型的迭代阈值算法，AMP 算法的表达形式类似于传统的迭代阈值算法。具体表达式为

$$\mathbf{x}^{t+1} = \eta_{\tau}(\mathbf{x}^t + \mathbf{A}^* \mathbf{r}^t) \quad (3)$$

$$\mathbf{r}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^t + \frac{\mathbf{r}^{t-1} \|\eta'_{\tau}(\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{A}^* \mathbf{r}^{t-1})\|_1}{m} \quad (4)$$

其中， \mathbf{x}^t 表示原信号 \mathbf{x}_0 的第 t 次迭代的估计值； $\eta_{\tau}(\cdot)$ 表示阈值函数， τ 表示阈值参数， τ 的取值决定了整个迭代算法的性能； \mathbf{A}^* 表示观测矩阵的共轭转置； \mathbf{r}^t 表示第 t 次迭代的残差， $\frac{\mathbf{r}^{t-1} \|\eta'_{\tau}(\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{A}^* \mathbf{r}^{t-1})\|_1}{m}$ 被称为 Onsager 校正项，

$m = \frac{M}{N}$ 表示采样率，Onsager 项中 $\eta'_{\tau}(\cdot)$ 表示 $\eta_{\tau}(\cdot)$ 的导数。由于 Onsager 项的存在，AMP 算法的收敛速度更快，相变性能更高，且使 AMP 算法的性能可以通过状态演化（SE, state evolution）^[7]进行分析和预测。

3 基于 QOT-AMP 的去噪重构算法

由于蒸发波导的各种重要参数（如高度、强度

等)可以根据蒸发波导预测模型获得,具体模型计算过程可参考文献[15-18],本文忽略蒸发波导数据预测模型计算的过程,直接将蒸发波导高度参数作为压缩感知重构的对象。

压缩感知的基础是感知对象的稀疏性。目前,对蒸发波导参数的稀疏性研究已经取得一定的进展,文献[6]中利用离散余弦变换(DCT, discrete cosine transform)对蒸发波导参数进行稀疏性分析且实现了重构,但仅在 DCT 域进行讨论,蒸发波导稀疏性并没有被充分挖掘;文献[19]为了提升感知的性能,提出一种递推的 KLT 基,将蒸发波导数据的稀疏度约束到 4 以内,为后续的去噪重构奠定稀疏性基础。

3.1 QST-AMP 算法

在上述稀疏性基础上,完全可以开展蒸发波导参数的压缩感知重构算法研究。针对蒸发波导参数观测过程中可能混入噪声的情况,未考虑去噪的重构方法无法充分发挥作用,因此本文在 AMP 算法的基础上,设计一种新的阈值函数对 AMP 进行改进,以实现蒸发波导参数的去噪重构。

AMP 算法中 $\eta_\tau(\cdot)$ 通常采用软阈值函数和硬阈值函数,这 2 种函数都已有相应的缺陷:软阈值函数重构结果存在恒定误差,硬阈值函数是不连续的。因此,本文针对 AMP 算法的阈值函数,设计了二次函数线型,克服软硬阈值的缺陷,称为二次阈值函数。

软阈值函数表达式为

$$\text{soft}(\mathbf{x}, \tau) = \begin{cases} \text{sgn}(\mathbf{x})(|\mathbf{x}| - \tau), & |\mathbf{x}| \geq \tau \\ 0, & |\mathbf{x}| < \tau \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\text{soft}(\cdot)$ 表示软阈值函数。

硬阈值函数的表达式为

$$\text{hard}(\mathbf{x}, \tau) = \begin{cases} \mathbf{x}, & |\mathbf{x}| \geq \tau \\ 0, & |\mathbf{x}| < \tau \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\text{hard}(\cdot)$ 表示硬阈值函数。

文献[20]考虑将 2 种算法结合,构造了一种称为稳固阈值函数的新阈值函数,如式(7)所示。

$$\text{stab}(\mathbf{x}, \tau) = \begin{cases} \mathbf{x}, & |\mathbf{x}| \geq b\tau \\ 0, & |\mathbf{x}| \leq \tau \\ \frac{b}{b-1} \text{sgn}(\mathbf{x})(|\mathbf{x}| - \tau), & \tau < |\mathbf{x}| < b\tau \end{cases} \quad (7)$$

图 1 给出了软、硬阈值函数以及稳固阈值函

数的曲线对比,稳固阈值函数中 $\tau = 2$, 参数 b 分别为 2、3、5、10、100。从图 1 中可以看出,硬阈值法更加贴近参考曲线,但硬阈值函数曲线中存在断点;软阈值函数曲线没有断点,但是软阈值函数曲线与参考曲线之间始终存在着恒定的差值,导致重构信号与真实信号之间也总是存在一定的误差。稳固阈值曲线位于硬阈值和软阈值曲线之间,并随着参数 b 的增大,稳固阈值函数曲线逐渐靠近软阈值曲线,这种阈值参数综合了软硬阈值函数的优点,且克服了硬阈值不连续和软阈值重构失真的缺点。

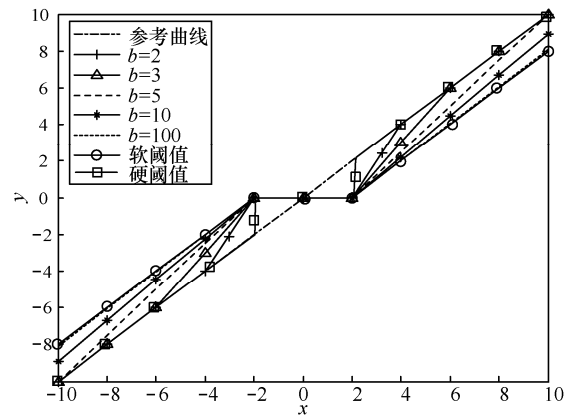


图 1 阈值函数曲线

在上述稳固阈值函数的基础上,为了进一步加快收敛速度,本文设计了二次函数线型,获得一种新的阈值算法,由于该阈值函数在 2 个段区间内采用的是二次函数表示形式,因此被称为 QST 函数。

$$\text{qst}(\mathbf{x}, \tau) = \begin{cases} \mathbf{x}, & |\mathbf{x}| \geq b\tau \\ 0, & |\mathbf{x}| \leq \tau \\ -\frac{\text{sgn}(\mathbf{x})}{(b-1)^2\tau} \mathbf{x}^2 + \frac{b^2+1}{(b-1)^2} \mathbf{x} - \frac{\text{sgn}(\mathbf{x})b^2\tau}{(b-1)^2}, & \tau < |\mathbf{x}| < b\tau \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\text{qst}(\cdot)$ 表示二次稳固阈值函数, $b \geq 2$ 。图 2 给出了当 $b = 3, \tau = 3$ 时二次稳固阈值函数曲线和稳固阈值函数曲线。

从图 2 中可以看出,在 $[\tau, b\tau]$ 和 $[-b\tau, -\tau]$ 这 2 个区间内,不再是稳固阈值函数的直线形式,而是二次函数线型,使函数比稳固阈值函数更快地收敛到 $y = x$ 这条直线上,估计信号与原信号之间的误差进一步减小,并且确保了连续性。因此,通过改进的阈值函数获得的 QST 被用作 AMP 的去噪阈值函数,简称为 QST-AMP。

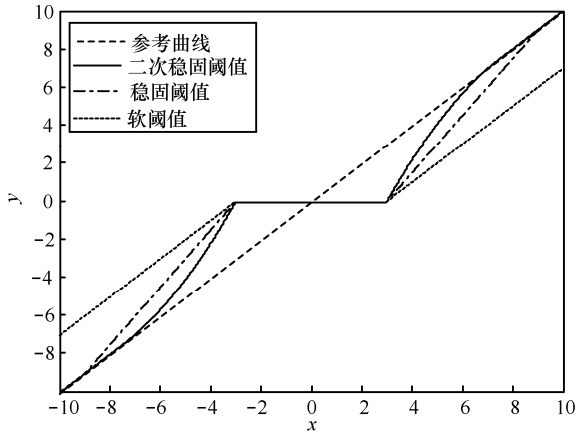


图 2 二次稳固阈值函数曲线

3.2 最优阈值设置策略

在 AMP 每次迭代过程中,合理设置阈值参数 τ 尤为重要。 τ 设置过大,部分真实信号会被滤掉; τ 设置过小,噪声去除不够彻底。由于在整个迭代过程中噪声逐渐减小,因此在早期迭代和后期迭代过程中,有效噪声的标准差相差较大,这意味着早期迭代的最佳参数在后期迭代过程中很有可能不再适用。Donoho 等^[7]将 AMP 迭代过程中的阈值参数固定为每次迭代过程中的噪声方差估计值。令 τ^t 表示 AMP 第 t 次迭代时的阈值参数,如式(9)所示。

$$\tau^t = (\hat{\sigma}_w^t)^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (r_i^t)^2 \quad (9)$$

其中, $\hat{\sigma}_w^t$ 表示第 t 次迭代时的噪声方差。在实际应用中,需要调整 AMP 算法中的 τ^1, τ^2, \dots , 才能获得最佳的性能。 τ^t 的选择影响整个算法的最终重构误差和收敛速度。文献[21]提出利用基于梯度下降法的无偏似然估计方法进行迭代过程中的阈值参数设置,但是由于梯度下降法存在下降路线迂回、极小值附近收敛慢的缺陷,使整体的收敛速度较慢。针对这一问题,本文引入了一种基于共轭梯度法的阈值设置策略。共轭梯度法的下降路线与梯度下降法“之”字形下降路线不同,能克服收敛速度慢的缺陷,而且不需要矩阵存储,具有步收敛性。

假设 AMP 第 t 次迭代时的信号 $\tilde{\mathbf{x}}^t$ 可以建模为 $\tilde{\mathbf{x}}^t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}^t$, \mathbf{v}^t 表示独立同分布的高斯噪声,且 $\mathbf{v}^t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_t^2 \mathbf{I})$, σ_t 表示噪声的标准差。主要问题是设置阈值参数 τ^t 。要解决这个问题,首先定义阈值估计的均方误差 (MSE, mean square error) 为

$$\text{er}(\tau, \sigma) = \frac{1}{N} \mathbb{E} \|\eta_\tau(\mathbf{x}_0 + \sigma \mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\|_2^2 \quad (10)$$

其中, $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\text{er}(\tau, \sigma)$ 被称为风险函数。为了最大限度地降低 MSE, 需要获得最优化参数 τ_{opt}

$$\tau_{\text{opt}} = \arg \min_{\tau} \text{er}(\tau) \quad (11)$$

要想获得最优化参数 τ_{opt} , 需要已知 $\text{er}(\tau, \sigma)$, 但是 $\text{er}(\tau, \sigma)$ 是 \mathbf{x}_0 的函数, 难以直接计算。为了解决这个问题, 利用 Stein 的无偏风险估计 (SURE, Stein unbiased risk estimate) 对风险函数进行无偏估计。

$$\widehat{\text{er}}(\tau, \sigma) = \frac{\|\eta(\tilde{\mathbf{x}}; \tau) - \tilde{\mathbf{x}}\|^2}{N} - \sigma^2 + \frac{2\sigma^2(\mathbf{e}^\top (\eta'(\tilde{\mathbf{x}}; \tau) - \mathbf{e}))}{N} \quad (12)$$

其中, \mathbf{e} 表示单位向量。

对于上述最优化问题, 共轭梯度法求 τ_{opt} 的具体步骤如下。

1) 第一个搜索方向是最速下降方向, 即 $d^{(1)} = -\nabla \widehat{\text{er}}(\tau^{(1)}, \sigma)$, 其中

$$\nabla \widehat{\text{er}}(\tau, \sigma) = \frac{d(\widehat{\text{er}}(\tau, \sigma))}{d(\tau)} = \frac{\widehat{\text{er}}(\tau + \Delta N, \sigma) - \widehat{\text{er}}(\tau, \sigma)}{\Delta N} \quad (13)$$

后续搜索方向为 $d^{(i+1)} = -\nabla \widehat{\text{er}}(\tau^{(i+1)}, \sigma) + \beta_i d^{(i)}$,

其中, $\beta_i = \frac{\|\nabla \widehat{\text{er}}(\tau^{(i+1)}, \sigma)\|^2}{\|\nabla \widehat{\text{er}}(\tau^{(i)}, \sigma)\|^2}$ 。

2) 设定步长 λ_k 。任取初始点 $\tau^{(1)}$, 后续各点通过 $\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}$ 计算得到, 计算 $\widehat{\text{er}}(\tau^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}) = \min_{\lambda} \widehat{\text{er}}(\tau^{(k)} + \lambda_k d^{(k)})$, 直到某个 $\tau^{(k)}$ 满足 $\nabla \widehat{\text{er}}(\tau^{(k)}, \sigma) = 0$ 。

3.3 算法流程

综上所述, 将 QST-AMP 与最优阈值设置策略相结合构成蒸发波导数据的去噪重构算法, 由于每次迭代过程中阈值参数都选择最优阈值, 因此将该方法称为基于二次最优阈值函数的 AMP (QOT-AMP, quadratic optimal threshold-AMP) 法。具体步骤如算法 1 描述。

算法 1 QOT-AMP 算法

输入 蒸发波导参数的观测值矢量 \mathbf{y} , 观测矩阵 \mathbf{A} , 迭代次数 iters

输出 重构蒸发波导参数 $\tilde{\mathbf{x}}$

步骤 1 初始化。 $\tilde{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}^0 = \mathbf{y}$, b ;

步骤 2 AMP 迭代。

for $t = 1 : \text{iters}$

$$\mathbf{q}^{t-1} = \mathbf{A}^T \mathbf{r}^{t-1} + \tilde{\mathbf{x}}^{t-1}$$

$$(\sigma^{t-1})^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M r^{t-1}(i)$$

$$\tau^{t-1} = (\sigma^{t-1})^2$$

利用共轭梯度法获得最优值 τ_{opt}^{t-1} 。

$$\tilde{\mathbf{x}}^t = \text{qst}(\mathbf{q}^{t-1}, \tau_{\text{opt}}^{t-1}, b)$$

生成 N 维随机列向量 $\mathbf{h} \in \mathbf{N}(0, \mathbf{I})$ ，并取

$$\nu = \frac{\|\mathbf{q}^{t-1}\|_{\infty}}{1000}, \quad \text{div}^t = \mathbf{h}^T \frac{(\text{qst}(\mathbf{q}^{t-1} + \tau \mathbf{b}, \tau_{\text{opt}}^{t-1}) - \mathbf{x}^t)}{\nu} \quad \text{On-}$$

$$\text{sager 项更新 } \text{onsager}^t = \mathbf{r}^{t-1} \frac{\text{div}^t}{M}$$

$$\text{残差更新 } \mathbf{r}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}^t + \text{onsager}^t$$

end for

步骤 3 输出。得到蒸发波导参数向量 $\tilde{\mathbf{x}}$ 。

3.4 算法收敛性分析

由文献[10]对 AMP 算法中去噪阈值函数的性质描述可知，阈值函数需要满足单调性和 Lipschitz 连续性，其中，单调性很容易可以得出，本文重点对其 Lipschitz 连续性进行证明。Lipschitz 连续性的定义为：对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个常量 K ($K > 0$)，使 $f(x)$ 在定义域（可为实数也可为复数）上的任意 2 个值满足

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad (14)$$

其中， K 为 $f(x)$ 的 Lipschitz 常数。证明 QST 函数的 Lipschitz 连续性，则需要证明

$$|\text{qst}(x_1, \tau) - \text{qst}(x_2, \tau)| \leq K |x_1 - x_2| \quad (15)$$

具体证明如下。

1) 当 $|x| \geq b\tau$ 时

$$\text{qst}(x, \tau) = x \quad (16)$$

令 $|x_1| > |x_2| \geq b\tau$ ，在 $K > 0$ 时满足 $|\text{qst}(x_1, \tau) - \text{qst}(x_2, \tau)| \leq K |x_1 - x_2|$ 。

2) 当 $\tau < |x| < b\tau$ 时

$$\text{qst}(x, \tau) = \frac{-\text{sgn}(x)}{(b-1)^2 \tau} x^2 + \frac{b^2+1}{(b-1)^2} x - \frac{\text{sgn}(x)b^2 \tau}{(b-1)^2} \quad (17)$$

令 $\tau < |x_1| < |x_2| < b\tau$ ，有

$$\begin{aligned} & |\text{qst}(x_1, \tau) - \text{qst}(x_2, \tau)| = \\ & \left| \frac{-\text{sgn}(x_1)}{(b-1)^2 \tau} x_1^2 + \frac{b^2+1}{(b-1)^2} x_1 - \frac{\text{sgn}(x_1)b^2 \tau}{(b-1)^2} - \right. \\ & \left. \frac{-\text{sgn}(x_1)}{(b-1)^2 \tau} x_2^2 - \frac{b^2+1}{(b-1)^2} x_2 + \frac{\text{sgn}(x_2)b^2 \tau}{(b-1)^2} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\text{sgn}(x_1)(x_2^2 - x_1^2)}{(b-1)^2 \tau} + \frac{b^2+1}{(b-1)^2} (x_1 - x_2) \right| = \\ & \left| \frac{(x_1 - x_2)}{(b-1)^2} (b^2 + 1 - \text{sgn}(x_1) \frac{(x_1 + x_2)}{\tau}) \right| \quad (18) \end{aligned}$$

因为 $\tau < |x_1| < |x_2| < b\tau$ ，所以 $2 < \frac{(x_1 + x_2)}{\tau} < 2b$ 。

那么，有

$$\begin{aligned} & |\text{qst}(x_1, \tau) - \text{qst}(x_2, \tau)| < \\ & \left| \frac{(x_1 - x_2)}{(b-1)^2} (b^2 + 1 - 2b \text{sgn}(x_1)) \right| = \left| \frac{(x_1 - x_2)}{(b-1)^2} (b - \text{sgn}(x_1))^2 \right| \quad (19) \end{aligned}$$

因此，当 $K \geq \left| \frac{(b - \text{sgn}(x_1))^2}{(b-1)^2} \right|$ 即

$$K \geq \begin{cases} 1, & \tau < x_1 < x_2 < b\tau \\ \frac{(b+1)^2}{(b-1)^2}, & -b\tau < x_2 < x_1 < -\tau \end{cases} \text{ 时，满足 Lipschitz}$$

连续条件。

3) 当 $|x| \leq -\tau$ 时， $\text{qst}(x, \tau) = 0$ ，仍然满足 Lipschitz 连续条件。

4) 在各分段点处皆满足 Lipschitz 连续条件。

综上所述，QST 函数满足 Lipschitz 连续条件。

QOT-AMP 算法的收敛性可以通过状态演变 (SE, state evolution) 方程进行检验。SE 方程是用来分析 AMP 算法性能的关键，一系列的 SE 方程可以预测 AMP 算法在每一次迭代过程中产生的 MSE，以确保整个迭代过程的收敛性。从 $\theta^0 = \frac{\|x_0\|_2^2}{n}$ 开始，SE 通过以下迭代产生一系列数值。

$$\theta^{t+1}(x_0, \delta, \sigma_w^2) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left\| \eta_{\tau}(x_0 + \tau \varepsilon) - x_0 \right\|_2^2 \quad (20)$$

其中， $(\sigma^t)^2 = \frac{\theta^t(x_0, \delta, \sigma_w^2)}{\delta} + \sigma_w^2$ ， $\varepsilon \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{I})$ 。

$\theta^{t+1}(x_0, \delta, \sigma_w^2)$ 表明 θ^t 与信号 x_0 、不确定参数 δ 以及观测噪声 σ_w^2 有关。

考虑到 AMP 去噪的迭代过程， \tilde{x}^t 表示第 t 次迭代信号的估计值。文献[10]通过大量的实验发现，如果 AMP 去噪迭代过程从 $x^0 = 0$ 开始，那么，SE 过程估计 AMP 去噪过程的均方差可以近似为

$$\theta^t(x_0, \delta, \sigma_w^2) \approx \frac{1}{n} \|x^t - x_0\|_2^2 \quad (21)$$

式(21)能够成立是建立在满足以下 3 个条件的

基础之上的^[10]。1) 观测矩阵 A 是独立同分布的均值为 0 的高斯矩阵； 2) 噪声 w 服从独立同分布的高斯分布； 3) 去噪阈值函数是 Lipschitz 连续函数。根据本文描述，上述 3 个条件已满足。图 3 给出了基于二次稳固阈值函数与软阈值函数的 AMP 算法的状态演变曲线和文献[21]中的状态演变曲线的比较。测试信号的长度为 1 000，稀疏度为 10，观测比率为 0.3。图 3 中 tau2 曲线表示算法的有效噪声方差，MSE 表示算法的均方误差，SE-tau2 和 SE-MSE 分别表示状态演变方程预测的有效噪声方差和 SE-MSE 表示状态演变方程预测的均方误差。对比来看，QOT-AMP 的残差能量和均方误差均低于 soft-AMP 和文献[21]中的算法。QOT-AMP 方法的收敛速度较快，在第 2 次迭代时已经实现收敛。

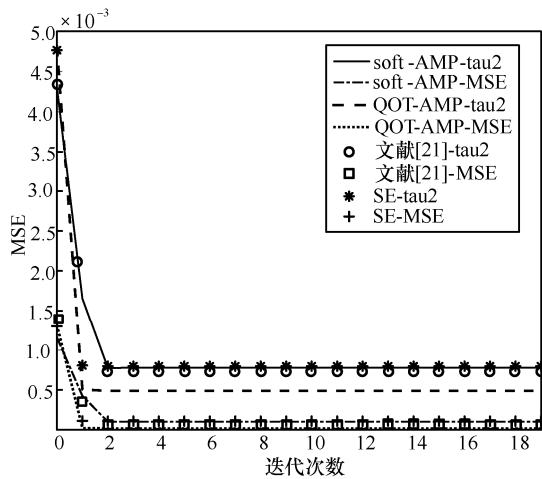


图 3 SE 曲线对比

4 性能分析及仿真实验

4.1 测试信号的去噪重构仿真分析

为了验证本文算法的有效性，分别在不同信噪比和不同稀疏度的条件下，将本文算法 QOT-AMP 与 6 种重构算法进行比较。用于对比实验的算法分别是 OMP、NLM-AMP^[10]、AMP-UD^[11]、SP^[22]、CoSaMP^[23]、soft-AMP (AMP 的去噪函数为软阈值函数)，其中，OMP 来自 SparseLab 软件包。

4.1.1 去噪重构精确度分析

以仿真信号为实验研究对象，首先研究了不同重构算法随信噪比的变化情况。取长度为 1 024 点的一维稀疏测试信号，采样速率设定为 Nyquist 速率的 20%，即观测数与信号长度之比为 0.2，稀疏度 $k = 50$ 。重构信噪比 (RSNR, reconstruction-SNR)

反映了算法重构信号后的准确性，RSNR 定义为

$$RSNR = 10 \lg \left(\frac{\|x\|_2}{\|x - \hat{x}\|_2} \right) \quad (22)$$

在信噪比在 $[-10, 20]$ dB 范围内以 5 dB 为间隔，分别对 5 种重构算法进行 1 000 次蒙特卡洛仿真实验。其中，QOT-AMP 与 soft-AMP 算法中的迭代次数设置为 30 次。图 4 给出了 7 种重构算法下的 RSNR 随噪声变化的性能曲线，可以看出随着信噪比的增加，重构算法的重构信噪比都呈上升趋势，其中，QOT-AMP 算法具有最佳的重构性能和最佳的抗噪性能，OMP 的重构性能最差，NLM-AMP 和 AMP-UD 算法的性能相当，次于 QOT-AMP 算法。NLM-AMP 方法是文献[10]将 NLM 去噪器加入 AMP 中的一种处理一维信号的去噪算法，去噪重构性能优于 soft-AMP 和 SP，AMP-UD 是文献[11]中提出的一种去噪重构方法，重构性能仅次于 QOT-AMP。

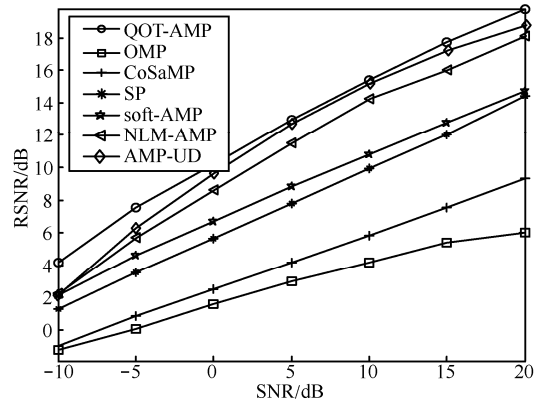


图 4 相同稀疏度下各算法 RSNR 与 SNR 关系曲线

然后，研究了信号稀疏性对重构性能的影响。

稀疏度通过稀疏比 $\frac{K}{N}$ (非零元素的个数与信号长度的比值) 来表示。测试信号的稀疏比在 $[0.01, 0.21]$ 的范围内以 0.02 的间隔变化，信号的信噪比设置为 5 dB 和 20 dB，各重构算法的参数设置与上一个实验相同，分别进行 1 000 次的蒙特卡洛实验。图 5 中给出了仿真实验的结果。从曲线总体变化情况来看，几种算法的重构性能随着稀疏比的减小而增大，即信号越稀疏重构性能越高。其中，QOT-AMP 算法的重构性能最好，且信号越稀疏，精确重构的优势越明显。然而，随着稀疏比的增大，QOT-AMP 算法的重构性能受影响较大。因此从侧面证明了探索待处理信号的稀疏性是保证重构精度的重要手

段之一。NLM-AMP 和 AMP-UD 算法的性能仅次于 QOT-AMP 算法，且某些稀疏比下，重构性能相差无几。

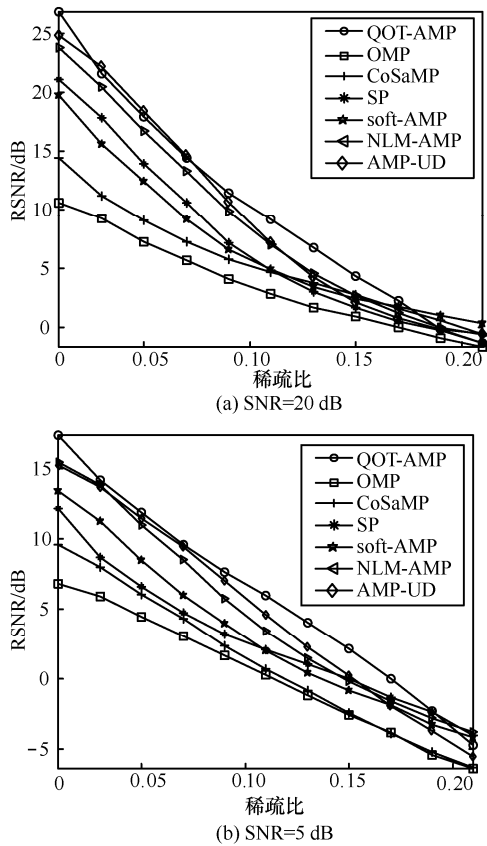


图 5 不同信噪比下各算法 RSNR 与稀疏比的关系

4.1.2 不同算法运算时间比较

在不同稀疏比的条件下，分别考察各算法的运算时间变化规律。实验环境为 Pentium® Dual-Core CPU，内存为 2 GB，运行环境为 Matlab R2014a。如表 1 所示，SNR 设置为 20 dB，其余参数设置参照 3.1.1 节。从表 1 数据可以看出，不同算法的运

算时间大致呈现出随稀疏比的增加而增加的趋势。其中，OMP 受稀疏度变化的影响较大，在稀疏比大于 0.1 时，重构时间跃升到 10 s 以上。NLM-AMP 与 AMP-UD 算法的运算时间较其他几种方法都长，其中 AMP-UD 算法的运行时间最长。本文算法的运算时间较其他 3 种算法长，是因为该算法加入了最优阈值设置策略，使迭代过程中增加了阈值计算的过程，从而导致运算时间增加。其他 3 种算法的运算时间相差无几，其中，CoSaMP 算法的运算时间比另外 2 种算法略长一些，SP、soft-AMP 这 2 种算法的运算时间最短。通过运算时间的比较发现，虽然 QOT-AMP 算法的运算时间不是最优，但是在可接受的范围之内，因此可以认为 QOT-AMP 算法通过牺牲可接受范围内的算法复杂度获得了提升的去噪重构性能，而 NLM-AMP 与 AMP-UD 算法虽然重构性能较高，但是运算时间过长，满足不了蒸发波导态势感知对时间的要求，后续实验不再对其进行讨论。

4.2 实测数据下的去噪重构实验

4.2.1 去噪重构精确度分析

实验数据采用 TAO (tropical atmosphere ocean) 项目中 2011 年 4 月 1 日—4 月 3 日的实测气象梯度数据。数据所在的空间范围为 [165°E, 95°W]、[8°S, 8°N]，时间分辨率为 10 min。空间分辨率需要参考数据网址上公布的传感器位置图。

根据 3.1 节中的实验结果分析可知，SP 是对照算法中性能最优的一种，因此选择 SP 算法作为实测数据去噪重构实验中的对比算法。根据第 2 节的稀疏性分析，在对比实验中利用 KLT 和 DCT 基作为稀疏基，进行对比分析。信噪比为 [-10,30]dB 的范围内，分别利用 KLT+QOT-AMP、KLT+soft-

表 1 不同算法在稀疏度不同的条件下运算时间比较

重构算法	重构时间/s									
	$\frac{K}{N}=0.01$	$\frac{K}{N}=0.03$	$\frac{K}{N}=0.05$	$\frac{K}{N}=0.07$	$\frac{K}{N}=0.09$	$\frac{K}{N}=0.11$	$\frac{K}{N}=0.13$	$\frac{K}{N}=0.15$	$\frac{K}{N}=0.17$	$\frac{K}{N}=0.19$
QOT-AMP	0.072 0	0.093 0	0.187 0	0.265 0	0.343 0	0.406 0	0.483 0	0.578 0	0.795 0	1.045 0
OMP	0.063 0	0.093 0	0.165 0	0.749 0	2.496 0	10.347 0	10.800 0	15.124 0	17.374 0	17.171 0
CoSaMP	0.062 0	0.083 0	0.098 0	0.094 0	0.152 0	0.173 0	0.196 0	0.214 0	0.295 0	0.365 0
SP	0.025 0	0.046 0	0.063 0	0.062 0	0.094 0	0.078 0	0.125 0	0.156 0	0.140 0	0.203 0
soft-AMP	0.064 0	0.063 0	0.074 0	0.0780	0.078 0	0.093 0	0.104 0	0.107 0	0.155 0	0.198 0
NLM-AMP	6.023 0	6.186 0	6.254 0	6.357 0	6.324 0	6.410 0	6.395 0	6.819 0	6.795 0	6.802 0
AMP-UD	30.524 0	30.858 0	31.325 0	31.562 0	31.862 0	31.765 0	32.001 0	32.158 0	32.456 0	32.682 0

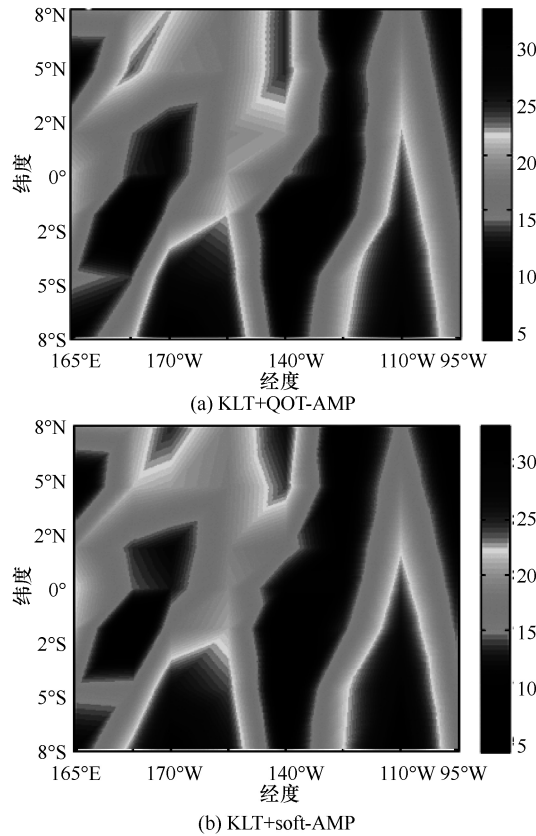


图 8 KLT 基下的蒸发波导数据去噪重构对比

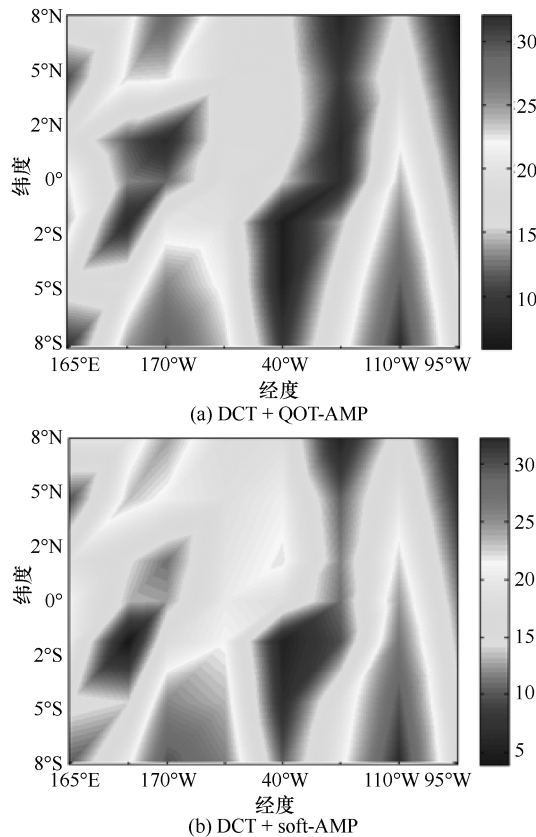


图 9 DCT 基下的蒸发波导数据去噪重构对比

此如何对实测蒸发波导数据中可能混入的其他类型噪声进行处理是下一步需要解决的难题。

参考文献:

[1] YANG K, ZHANG Q, SHI Y, et al. On analyzing space time distribution of evaporation duct height over the global ocean [J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2016, 35(7): 20-29.

[2] 张金鹏, 张玉石, 吴振森, 等. 基于雷达海杂波的区域性非均匀蒸发波导反演方法[J]. *物理学报*, 2015, 64(12):136-146.

ZHANG J P, ZHANG Y S, WU Z S, et al. Inversion of regional range-dependent evaporation duct from radar sea clutter[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(12):136-146.

[3] 王明辉, 陈冰怀, 黄海璠, 等. 自动气象站常规传感器现场检测系统设计[J].*气象科技*,2019,47(03): 402-407.

WANG M H, CHEN B H, HUANG H Y, et al. Design of detection system for regular sensors of automatic weather stations[J]. *Meteorological Science and Technology*, 2019, 47(03): 402-407.

[4] 王超, 韩笑冬, 王睿, 等. 支持网络互连的可重构卫星平台关键技术研究[J]. *通信学报*, 2017, 38(S1): 83-87.

WANG C, HAN X D, WANG R, et al. Study of key technology for reconfigurable satellite platform supporting network interconnection[J]. *Journal on Communications*, 2017, 38(S1):83-87.

[5] 王振会, 杨璐, 姚展予, 等. 卫星遥感资料在蒸发波导数值预报中的应用[J]. *电波科学学报*, 2012, 27(04): 819-824.

WANG Z H, YANG L, YAO Z Y, et al. Application of satellite remote sensing data for numerical prediction of evaporation duct[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2012, 27(04): 819-824.

[6] 田文飏, 芮国胜, 王绍班, 等. 三维观测模型下蒸发波导时空态势压缩感知[J].*电波科学学报*, 2014, 29(2): 207-212.

TIAN W B, RUI G S, WANG S B, et al. Situational compressed sensing of evaporation duct based on 3-dimensional measurement model [J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2014, 29(2): 207-212.

[7] DONOHO D L, MALEKI A, MONTANARI A. Message-passing algorithms for compressed sensing[J].*Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2009, 106(45): 18914-18919.

[8] RUSH C, VENKATARAMANAN R. Finite-sample analysis of approximate message passing.[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2017, (99):1-41.

[9] XIE Z H, MA L H. Structured approximate message passing algorithm with a Laplacian scale mixture prior[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(3): 520-528.

[10] METZLER C A, MALEKI A, BARANIUK R G. From denoising to compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2016, 62(9):5117-5144.

[11] MA Y, ZHU J, BARON D . Approximate message passing algorithm with universal denoising and gaussian mixture learning [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(21):5611-5622.

[12] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and

other inverse problems [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4):586-597.

- [13] CHEN S B, DONOHO D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1):33-61.
- [14] FORNASIER M, RAUHUT H. Iterative thresholding algorithm [J]. Applied Computational harmonic analysis, 2008, 25: 187-208.
- [15] BABIN S M. A new model of the oceanic evaporation duct and its comparison with current models [D]. US: University of Maryland, 1996.
- [16] 杨坤德, 马远良, 史阳. 西太平洋蒸发波导的时空统计规律研究[J]. 物理学报, 2009,58(10):7339-7350.
YANG K D, MA Y L, SHI Y. Spatio-temporal distributions of evaporation duct for the West Pacific Ocean[J]. Acta Physica Sinica, 2009,58(10):7339-7350.
- [17] MUSSONG L, GAUTHIER S, BRUTH E. A simple method to determine evaporation duct height in the surface boundary layer[J]. Radio Science, 1997, 27(9): 193-204.
- [18] 刘成国, 黄际英, 江成荫, 等. 用伪折射率和相似理论计算海上蒸发波导剖面[J]. 电子学报, 2001, 29 (7): 970- 972.
LIU C G, HUANG J Y, JIANG C Y, et al. Modeling evaporation duct over sea with pseudo-refractivity and similarity theory[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29 (7): 970- 972.
- [19] 田文飏, 芮国胜, 董道广, 等. 基于盲自适应 KLT 的蒸发波导压缩感知方法[J]. 电子学报, 2018, 46(9): 2068-2074.
TIAN W B, RUI G S, DONG D G et al. Compressed sensing of evaporation duct based on blind adaptive KLT estimation[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(9): 2068-2074.
- [20] DONOHO D L, JOHNSTONE I, MONTANARI A. Accurate prediction of phase transitions in compressed sensing via a connection to minimax denoising [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 59(6): 3396-3433.
- [21] MOUSAVI A, MALEKI A, BARANIUK R G. Parameterless optimal approximate message passing[J]. Statistics, arXiv: 1311.0035v1, 2013.
- [22] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 55(5):2230-2249.
- [23] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26(3):301-321.

[作者简介]



芮国胜(1968-), 男, 山东烟台人, 博士, 海军航空大学教授、博士生导师, 主要研究方向为压缩感知、现代滤波理论。



刘歌(1991-), 女, 山东威海人, 海军航空大学博士生, 主要研究方向为压缩感知、蒸发波导反演。



田文飏(1987-), 男, 江西南昌人, 博士, 海军航空大学副教授, 主要研究方向为压缩感知、蒸发波导反演。



董道广(1990-), 男, 山东济南人, 海军航空大学博士生, 主要研究方向为 Bayesian 统计学习、压缩感知和蒸发波导反演。



张雅楠(1990-), 女, 山东烟台人, 93716 部队助理工程师, 主要研究方向为压缩感知、数字图像处理。